COURS COMPLET

Estimation par Intervalle

GPL-1008 – Méthodes statistiques pour sciences sociales

Université Laval • Hiver 2026

■ Du concept intuitif aux formules — avec exemples détaillés pas à pas

TABLE DES MATIÈRES

N°	Chapitre	Page
1	Rappels mathématiques essentiels	p. 2
2	Estimation ponctuelle — révision rapide	p. 3
3	Qu'est-ce que l'estimation par intervalle ?	p. 4
4	Estimation de μ quand σ est CONNU (loi Z)	p. 5
5	Facteurs influençant la largeur de l'intervalle	p. 8
6	Estimation de μ quand σ est INCONNU (loi t)	p. 9
7	Distribution de Student vs Normale	p. 11

8	Estimation de la proportion p par intervalle	p. 13
9	Synthèse et tableau récapitulatif	p. 15
10	Exercices résolus complets	p. 16

1. Rappels mathématiques essentiels

Avant de plonger dans l'estimation par intervalle, voici les notions et formules mathématiques de base que vous devez avoir en tête. Tout sera expliqué avec des exemples concrets.

1.1 Moyenne et variance

La **moyenne** (ou espérance) d'un ensemble de valeurs est leur somme divisée par le nombre de valeurs :

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + ... + x_n) / n = (1/n) \times \Sigma x_i$$

La **variance** mesure à quel point les valeurs s'éloignent de la moyenne. Plus la variance est grande, plus les données sont dispersées :

$$s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) \text{ et } s = \sqrt{s^2} \text{ (écart-type)}$$

✏ **Exemple concret — tailles en cm**

Données : 170, 175, 168, 180, 177 (n = 5)

$\bar{x}$ = (170 + 175 + 168 + 180 + 177) / 5 = 870 / 5 = **174 cm**

s^2 = [(170-174)² + (175-174)² + (168-174)² + (180-174)² + (177-174)²] / 4

= [16 + 1 + 36 + 36 + 9] / 4 = 98 / 4 = **24,5**

s = √24,5 ≈ **4,95 cm**

1.2 La loi normale N(μ, σ²)

La **loi normale** est la fameuse courbe en cloche. Elle est caractérisée par deux paramètres :

Paramètre	Symbole	Signification
Moyenne (centre)	μ	Là où se situe le centre de la courbe
Variance (largeur)	σ^2	À quel point la courbe est étalée
Écart-type	σ	Racine carrée de la variance — même unité que X

Propriété clé de la loi normale :

95% des valeurs sont comprises entre $\mu - 1{,}96\sigma$ et $\mu + 1{,}96\sigma$

■ *Intuition : si les tailles des adultes suivent N(170, 81), alors 95% des adultes mesurent entre 170 – 1,96×9 = 152 cm et 170 + 1,96×9 = 188 cm.*

1.3 La loi normale centrée réduite Z ~ N(0,1)

Toute variable normale peut être transformée en une variable Z qui suit N(0,1) (moyenne = 0, variance = 1) :

$$Z = (X - \mu) / \sigma$$

Cela permet de lire une seule table (la table de Z) pour n'importe quelle loi normale. Les valeurs critiques les plus utilisées sont :

Seuil de confiance	α	$\alpha/2$	Valeur Z critique ($z_{\alpha/2}$)
90%	0,10	0,05	1,644
95%	0,05	0,025	1,960
99%	0,01	0,005	2,576

■ *Comment lire : z = 1,96 signifie que P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95. Autrement dit, il y a 95% de chances qu'une valeur Z se trouve dans cet intervalle.*

2. Estimation ponctuelle — révision rapide

L'**estimation ponctuelle** consiste à estimer un paramètre de la population (μ ou p) par une seule valeur calculée à partir d'un échantillon.

2.1 Estimer la moyenne μ

On utilise la moyenne de l'échantillon **x■** comme estimateur de μ :

x■ = (1/n) × Σ x■ → estimateur ponctuel de μ

Propriétés importantes de x■ :

- **Sans biais** : E[x■] = μ — en moyenne, x■ est égal à la vraie valeur de μ.
- **Variance de x■** : V(x■) = σ²/n — l'estimateur est d'autant plus précis que n est grand.
- **Écart-type de x■** : σ_x■ = σ/√n (aussi appelé erreur standard).

2.2 Estimer la proportion p

Quand on veut savoir quelle fraction de la population possède une caractéristique (ex. : être syndiqué, être satisfait), on utilise :

p■ = x / n où x = nombre d'observations avec la caractéristique

Propriétés de p■ :

- E[p■] = p (sans biais)
- V(p■) = p(1–p)/n
- Par le théorème central limite : p■ → N(p, p(1–p)/n) si np ≥ 5 et n(1–p) ≥ 5

■■ *Problème de l'estimation ponctuelle : x■ change d'un échantillon à un autre ! Pour n'importe quel échantillon donné, x■ ≠ μ. On ne sait pas à quel point notre estimation est précise. C'est là qu'entre en jeu l'estimation par INTERVALLE.*

✏■ Illustration du problème

Imaginons qu'on veuille estimer le salaire moyen μ de tous les employés d'une ville.

• Échantillon 1 de 50 personnes → x■■ = 42 500 $

• Échantillon 2 de 50 personnes → x■■ = 44 200 $

• Échantillon 3 de 50 personnes → x■■ = 41 800 $

Chaque x■ est différent. Lequel est le 'bon' ? Aucun ne l'est exactement !

→ L'estimation par intervalle nous donne une **fourchette de valeurs plausibles** pour μ.

3. Qu'est-ce que l'estimation par intervalle ?

Au lieu de donner une seule valeur pour μ (comme x■ = 174 cm), l'estimation par intervalle fournit un **intervalle de valeurs** qui, avec une certaine probabilité, contient la vraie valeur de μ.

3.1 L'analogie du thermomètre imprécis

✏■ Analogie intuitive

Votre thermomètre a une précision de ±2°C. Il affiche 38°C.

→ Vous dites : 'La vraie température est entre 36°C et 40°C.'

C'est exactement le principe de l'intervalle de confiance :

x■ ± marge d'erreur → [borne inférieure ; borne supérieure]

3.2 La structure d'un intervalle de confiance

IC = [x■ − marge d'erreur ; x■ + marge d'erreur]

Où la **marge d'erreur** = valeur_critique × écart-type_de_x■

3.3 Qu'est-ce que le seuil de confiance ?

Le **seuil de confiance (1−α)×100%** indique la proportion d'intervalles (sur des échantillons répétés) qui contiendraient la vraie valeur de μ.

Interprétation correcte d'un IC à 95% :
Si on répétait l'expérience 100 fois (100 échantillons différents) et que pour chacun on calculait l'intervalle de confiance, alors environ 95 de ces 100 intervalles contiendraient la vraie valeur de μ. 5 ne la contiendraient pas.

■■ *Ce n'est PAS la même chose que dire : 'il y a 95% de chances que μ soit dans CET intervalle'. μ est fixe — c'est l'intervalle qui est aléatoire !*

➨■ Image des 100 intervalles

Imaginez 100 pêcheurs qui lancent chacun un filet dans l'océan.

Le poisson (= μ) ne bouge pas. Ce sont les filets (= intervalles) qui bougent.

À 95% de confiance : 95 filets attrapent le poisson, 5 le ratent.

On ne sait pas si NOTRE filet est l'un des 95 ou l'un des 5 — mais on a 95% de chances !

4. Estimation de μ quand σ est CONNU (loi Z)

C'est le cas le plus simple (mais le moins fréquent en pratique). On connaît l'écart-type σ de la population — on n'a qu'à estimer la moyenne μ.

4.1 La formule de l'intervalle de confiance

IC à (1–α)×100% = [x■ – z_{α/2} × σ/√n ; x■ + z_{α/2} × σ/√n]

Décomposition des éléments :

Élément	Symbole	Rôle
Moyenne de l'échantillon	x■	Centre de l'intervalle
Valeur critique de Z	z_{α/2}	Dépend du seuil de confiance voulu
Écart-type de la pop.	σ	Connu et donné
Taille de l'échantillon	n	Influence la précision
Écart-type de x■	σ/√n	Erreur standard — mesure la variabilité de x■

4.2 Pourquoi z = 1,96 pour 95% ?

Rappel : pour Z ~ N(0,1), on sait que P(–1,96 < Z < 1,96) = 0,95. Cela vient directement de la table de la loi normale :

Calcul	Valeur
P(Z < –1,96)	0,025
P(Z < 1,96)	0,975
P(–1,96 < Z < 1,96) = 0,975 – 0,025	0,95 ✓

4.3 Construction pas à pas de l'intervalle

Étapes pour construire un IC à 95% (σ connu) :

1. Calculer x■ à partir des données
2. Calculer σ_x■ = σ/√n (l'erreur standard)
3. Choisir z_{α/2} selon le seuil voulu (95% → 1,96 ; 99% → 2,576 ; 90% → 1,644)
4. Calculer la marge d'erreur : ME = z_{α/2} × σ/√n
5. IC = [x■ – ME ; x■ + ME]

4.4 Exemple complet à 95%

➨■ Exemple 1 — Résultats scolaires (σ connu)

Données : n = 100 élèves, x■ = 82 points, σ = 20 (connu)

Question : Estimer μ (la moyenne de tous les élèves) à 95% de confiance.

Étape 1 : x■ = 82 (donné)

Étape 2 : σ_x■ = σ/√n = 20/√100 = 20/10 = **2**

Étape 3 : seuil = 95% → z_{α/2} = **1,96**

Étape 4 : ME = 1,96 × 2 = **3,92**

Étape 5 : IC = [82 – 3,92 ; 82 + 3,92] = **[78,08 ; 85,92]**

■ Interprétation : On estime que la vraie moyenne μ de la population se situe entre 78,08 et 85,92 points, avec un seuil de confiance de 95%.

4.5 Exemple à 99%

➨■ Exemple 2 — Même données, seuil 99%

Mêmes données : n = 100, x■ = 82, σ = 20

Étape 1-2 : x■ = 82 ; σ_x■ = 2 (identiques)

Étape 3 : seuil = 99% → z_{α/2} = **2,576**

Étape 4 : ME = 2,576 × 2 = **5,152**

Étape 5 : IC = [82 – 5,152 ; 82 + 5,152] = **[76,848 ; 87,152]**

■ Remarque : L'intervalle à 99% [76,85 ; 87,15] est PLUS LARGE que celui à 95% [78,08 ; 85,92].

→ Plus on veut être sûr de capturer μ, plus l'intervalle doit être large. Logique !

✏■ Exemple 3 — Exercice avec n = 35 (tous les seuils)

Données : n = 35, x■ = 15,1, σ = 0,72

σ_x■ = 0,72/√35 = 0,72/5,916 ≈ **0,1217**

IC à 90% (z = 1,644) :

ME = 1,644 × 0,1217 = 0,200 → IC = [14,90 ; 15,30]

IC à 95% (z = 1,960) :

ME = 1,960 × 0,1217 = 0,239 → IC = [14,86 ; 15,34]

IC à 99% (z = 2,576) :

ME = 2,576 × 0,1217 = 0,313 → IC = [14,79 ; 15,41]

■ Conclusion : Plus le seuil est élevé, plus l'intervalle est large.

5. Facteurs influençant la largeur de l'intervalle

La largeur de l'intervalle = $2 \times z_{\alpha/2} \times \sigma/\sqrt{n}$ est influencée par trois facteurs :

Facteur	Effet sur la largeur	Explication intuitive
↑ Seuil de confiance $(1-\alpha)$	↑ **PLUS LARGE**	Pour capturer μ plus souvent, il faut lancer un filet plus grand.
↑ Variance σ^2 de la population	↑ **PLUS LARGE**	Données très dispersées → moins de précision → intervalle plus grand.
↑ Taille de l'échantillon n	↓ **PLUS ÉTROIT**	Plus d'observations → plus d'info → estimation plus précise.

Exemple numérique — impact de n

Mêmes conditions : $\bar{x}$ = 82, σ = 20, IC à 95% (z = 1,96)

n = 25 : $\sigma_{\bar{x}} = 20/5 = 4{,}0$ → ME = 1,96 × 4 = 7,84 → IC = [74,16 ; 89,84] (largeur = 15,68)

n = 100 : $\sigma_{\bar{x}} = 20/10 = 2{,}0$ → ME = 1,96 × 2 = 3,92 → IC = [78,08 ; 85,92] (largeur = 7,84)

n = 400 : $\sigma_{\bar{x}} = 20/20 = 1{,}0$ → ME = 1,96 × 1 = 1,96 → IC = [80,04 ; 83,96] (largeur = 3,92)

En quadruplant n (de 100 à 400), on divise la largeur par 2. C'est la règle n→4n divise ME par 2.

Formule utile : si vous voulez une marge d'erreur ME donnée, il faut $n \geq (z_{\alpha/2} \times \sigma / ME)^2$

6. Estimation de μ quand σ est INCONNU (loi t de Student)

En pratique, on ne connaît **presque jamais** σ. On doit l'estimer à partir de l'échantillon, ce qui introduit plus d'incertitude.

6.1 Estimer σ par s

On remplace σ par **s**, l'écart-type de l'échantillon :

$$s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) \text{ et } s = \sqrt{s^2}$$

■ *Pourquoi (n–1) et non n au dénominateur ? Parce qu'on perd un 'degré de liberté' en estimant x̄ avant de calculer s². On dit qu'il y a n–1 degrés de liberté. Avec une seule observation (n=1), on ne peut rien dire sur la variabilité !*

6.2 La loi de Student t(n–1)

Quand on remplace σ par s, la statistique qui en résulte ne suit plus exactement une loi normale — elle suit une **loi de Student** avec (n–1) degrés de liberté :

$$T = (\bar{x} - \mu) / (s/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$$

Caractéristiques de la loi de Student :

- Symétrique, centrée sur 0 (comme la loi normale)
- Queues plus épaisses que la loi normale (plus d'incertitude car σ inconnu)
- Plus n est grand, plus t(n–1) ressemble à N(0,1)
- Pour n–1 > 30 degrés de liberté, très proche de N(0,1)

6.3 La formule de l'intervalle de confiance (σ inconnu)

$$\text{IC à } (1-\alpha)\times 100\% = [\ \bar{x} - t_{\alpha/2,\, n-1} \times s/\sqrt{n}\ ;\ \bar{x} + t_{\alpha/2,\, n-1} \times s/\sqrt{n}\ ]$$

La seule différence avec le cas σ connu : on remplace $z_{\alpha/2}$ par $t_{\alpha/2,\, n-1}$ et σ par **s**.

6.4 Valeurs critiques de t selon les degrés de liberté

Degrés de liberté (n–1)	t à 90%	t à 95%	t à 99%
5	2,015	2,571	4,032
10	1,812	2,228	3,169
20	1,725	2,086	2,845
30	1,697	2,042	2,750
34	1,691	2,032	2,728
50	1,676	2,009	2,678
100	1,660	1,984	2,626
∞ (= loi normale)	1,644	1,960	2,576

■ *Observation clé : plus n est grand, plus les valeurs t se rapprochent des valeurs z. À la limite (n → ∞), t = z.*

6.5 Exemple complet — σ inconnu

Exemple 4 — Salaires (σ inconnu)

Données : n = 35 employés, x■ = 15,1 (en milliers $), s = 0,72

Degrés de liberté : n–1 = 34

IC à 90% ($t_{0,05 ; 34} = 1,691$) :

ME = 1,691 × 0,72/√35 = 1,691 × 0,1217 = 0,2058

IC = [15,1 – 0,2058 ; 15,1 + 0,2058] = **[14,89 ; 15,31]**

IC à 95% ($t_{0,025 ; 34} = 2,032$) :

ME = 2,032 × 0,72/√35 = 2,032 × 0,1217 = 0,2473

IC = [15,1 – 0,2473 ; 15,1 + 0,2473] = **[14,85 ; 15,35]**

IC à 99% ($t_{0,005 ; 34} = 2,728$) :

ME = 2,728 × 0,72/√35 = 2,728 × 0,1217 = 0,3320

IC = [15,1 – 0,3320 ; 15,1 + 0,3320] = **[14,77 ; 15,43]**

Comparaison σ connu vs σ inconnu (IC à 95%, même données) :

σ **connu** (z = 1,96) → IC = [14,86 ; 15,34] (largeur = 0,48)

σ **inconnu** (t = 2,032) → IC = [14,85 ; 15,35] (largeur = 0,50)

L'intervalle est légèrement plus large quand σ est inconnu. L'incertitude supplémentaire liée à l'estimation de σ élargit l'intervalle.

7. Distribution de Student vs Normale — Visualisation

Pour bien comprendre pourquoi on utilise t au lieu de z quand σ est inconnu, voici une comparaison visuelle et conceptuelle des deux distributions.

7.1 Les différences clés

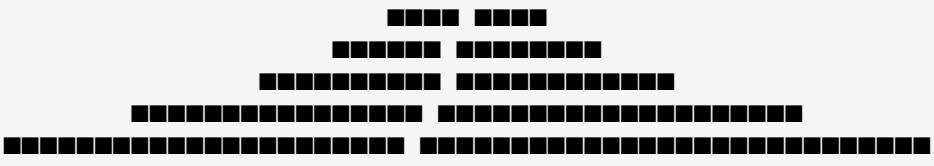
Caractéristique	Loi Normale N(0,1)	Loi de Student t(ν)
Forme	Cloche symétrique	Cloche symétrique
Centre	0	0
Queues	Minces	PLUS ÉPAISSES (plus de prob. aux extrêmes)
Paramètre	μ et σ²	ν = degrés de liberté = n–1
Quand utiliser	σ connu	σ inconnu (cas le plus fréquent)
Valeur critique à 95%	1,960 (fixe)	Variable selon ν (ex: 2,042 pour ν=30)

7.2 Représentation schématique

La courbe de Student (ligne rouge) a les queues plus épaisses que la normale (ligne noire). Cela signifie qu'on a besoin d'un intervalle plus large pour la même confiance :

Normale N(0,1) | Student t (ν petit)

Représentation (schématique) :



7.3 Degrés de liberté — comprendre intuitivement

Les **degrés de liberté (dl)** représentent la quantité d'information indépendante disponible pour estimer la variance :

✏■ Analogie pour les degrés de liberté

Imaginez que vous avez 5 nombres dont vous savez que la moyenne est 10.

Vous choisissez librement : 8, 12, 9, 11 — mais le 5ème est FORCÉ d'être 10 !

(8+12+9+11+x)/5 = 10 → x = 10 (pas de choix)

→ Avec n=5 observations, seulement 4 = n–1 sont 'libres' pour estimer la variance.

→ d.l. = n–1 = 4

■ *Règle pratique : si n–1 > 30, la loi de Student est très proche de la loi normale. On peut alors utiliser les valeurs z comme approximation.*

8. Estimation de la proportion p par intervalle

On s'intéresse ici à estimer une proportion dans une population — par exemple : la proportion de clients satisfaits, la proportion de gens syndiqués, la proportion de pièces défectueuses, etc.

8.1 La formule

IC pour p = [p■ − z_{α/2} × √(p■(1−p■)/n) ; p■ + z_{α/2} × √(p■(1−p■)/n)]

Où **p■ = x/n** est la proportion observée dans l'échantillon (x = nombre ayant la caractéristique, n = taille de l'échantillon).

■ *Condition d'applicabilité : np■ ≥ 5 ET n(1−p■) ≥ 5 (pour que la loi normale soit une bonne approximation).*

8.2 Pourquoi la loi normale (et non t) ?

Pour les proportions, on utilise toujours la loi **normale Z** (jamais la loi t). En effet, la variance de p■ est **p■(1−p■)/n**, une formule qui s'estime directement à partir de p■ — il n'y a pas d'ambiguïté comme avec σ².

8.3 Exemple complet

➩■ Exemple 5 — Satisfaction clients Walmart

Enquête auprès de n = 900 clients.

x = 396 clients sont satisfaits.

Étape 1 : Calculer p■ = 396/900 = **0,44** (44% de clients satisfaits dans l'échantillon)

Étape 2 : Vérifier les conditions : np■ = 900 × 0,44 = 396 ≥ 5 ✓ ; n(1–p■) = 504 ≥ 5 ✓

Étape 3 : Calculer l'écart-type estimé : √(p■(1–p■)/n) = √(0,44 × 0,56 / 900)

= √(0,2464/900) = √(0,0002738) ≈ **0,01655**

Étape 4 : Pour 95%, z_{α/2} = 1,96

Étape 5 : ME = 1,96 × 0,01655 = **0,0324** ≈ **3,24%**

Étape 6 : IC = [0,44 – 0,032 ; 0,44 + 0,032] = **[0,408 ; 0,472]**

■ Interprétation : On estime qu'entre 40,8% et 47,2% de tous les clients Walmart sont satisfaits, avec un niveau de confiance de 95%.

➩■ Exemple 6 — Proportions aux élections (sondage politique)

Un sondage de n = 1200 personnes révèle que 612 ont l'intention de voter pour le parti A.

p■ = 612/1200 = **0,51** (51%)

Conditions : 1200 × 0,51 = 612 ≥ 5 ✓ ; 1200 × 0,49 = 588 ≥ 5 ✓

√(0,51 × 0,49 / 1200) = √(0,2499/1200) = √(0,0002083) ≈ 0,01443

IC à 95% : ME = 1,96 × 0,01443 = 0,0283

IC = [0,51 – 0,028 ; 0,51 + 0,028] = **[0,482 ; 0,538]** soit [48,2% ; 53,8%]

IC à 99% : ME = 2,576 × 0,01443 = 0,0372

IC = [0,51 – 0,037 ; 0,51 + 0,037] = **[0,473 ; 0,547]** soit [47,3% ; 54,7%]

■ À 95% : l'intervalle inclut 50% → on ne peut pas affirmer que le parti A a la majorité !

9. Synthèse et tableau récapitulatif

Voici un résumé complet de toutes les formules d'estimation par intervalle vues dans ce cours :

Situation	Formule de l'IC	Distribution	Condition
Estimer μ σ CONNU	**x■ ± z_{α/2} × σ/√n**	Z ~ N(0,1)	n quelconque si X~N n > 30 sinon
Estimer μ σ INCONNU	**x■ ± t_{α/2,n-1} × s/√n**	T ~ t(n–1) (Student)	Même conditions (cas le plus fréquent!)
Estimer p	**p■ ± z_{α/2} × √(p■(1-p■)/n)**	Z ~ N(0,1)	np■ ≥ 5 n(1-p■) ≥ 5

Valeurs critiques à retenir absolument :

Seuil	α	α/2	z_{α/2}	t_{α/2,30}	t_{α/2,10}
90%	0,10	0,05	1,644	1,697	1,812
95%	0,05	0,025	1,960	2,042	2,228
99%	0,01	0,005	2,576	2,750	3,169

Règles mnémotechniques :

- z = 1,96 pour 95% → retenir comme '~2'
- z = 2,576 pour 99% → retenir comme '~2,6'
- Plus le seuil augmente → plus l'intervalle est LARGE
- Plus n augmente → plus l'intervalle est ÉTROIT (précision ∝ √n)
- σ inconnu → remplacer z par t_{n-1} (légèrement plus grand)
- Pour p : toujours la loi Z, jamais t

10. Exercices résolus complets

Exercice 1 — Poids moyen (σ connu)

Énoncé : Une usine produit des boîtes de conserve. On sait que σ = 5 g. Un contrôle porte sur n = 64 boîtes, et la moyenne observée est x■ = 252 g. Construisez un IC à 95% et à 99% pour le poids moyen μ.

➥■ Solution complète

Données : n = 64, x■ = 252 g, σ = 5 g (connu)

Étape 1 : σ_x■ = σ/√n = 5/√64 = 5/8 = **0,625 g**

IC à 95% (z = 1,96) :

ME = 1,96 × 0,625 = 1,225 g

IC = [252 – 1,225 ; 252 + 1,225] = **[250,775 g ; 253,225 g]**

IC à 99% (z = 2,576) :

ME = 2,576 × 0,625 = 1,61 g

IC = [252 – 1,61 ; 252 + 1,61] = **[250,39 g ; 253,61 g]**

■ Interprétation : Avec 95% de confiance, le poids moyen de toutes les boîtes se situe entre 250,8 g et 253,2 g.

Exercice 2 — Durée de vie des ampoules (σ inconnu)

Énoncé : Un fabricant teste n = 25 ampoules. La durée de vie moyenne de l'échantillon est x■ = 1 200 heures et s = 100 heures. L'écart-type de la population est inconnu. Construisez un IC à 95%.

✏■ **Solution complète**

Données : n = 25, x■ = 1 200 h, s = 100 h, σ inconnu

Étape 1 : Degrés de liberté : ν = n–1 = **24**

Étape 2 : s_x■ = s/√n = 100/√25 = 100/5 = **20 h**

Étape 3 : IC à 95% → t_{0,025 ; 24} = **2,064** (table de Student)

Étape 4 : ME = 2,064 × 20 = **41,28 h**

Étape 5 : IC = [1200 – 41,28 ; 1200 + 41,28] = **[1 158,72 h ; 1 241,28 h]**

■ Interprétation : On estime avec 95% de confiance que la durée de vie moyenne de toutes les ampoules est entre 1 159 heures et 1 241 heures.

Comparaison avec σ connu (hypothétiquement σ = 100) :

ME_z = 1,96 × 20 = 39,2 → IC = [1 160,8 ; 1 239,2] (légèrement plus étroit)

Exercice 3 — Proportion de défauts (IC pour p)

Énoncé : Dans une usine, on inspecte n = 500 pièces et on trouve x = 35 défectueuses. Estimez la proportion de pièces défectueuses dans toute la production avec un IC à 95% et à 99%.

✏■ Solution complète

Données : n = 500, x = 35 défauts, p■ = 35/500 = **0,07** (7%)

Vérification des conditions :

np■ = 500 × 0,07 = 35 ≥ 5 ✓

n(1–p■) = 500 × 0,93 = 465 ≥ 5 ✓

Écart-type estimé : √(p■(1–p■)/n) = √(0,07 × 0,93 / 500) = √(0,0651/500) = √(0,0001302) ≈ **0,01141**

IC à 95% (z = 1,96) :

ME = 1,96 × 0,01141 = 0,02236

IC = [0,07 – 0,022 ; 0,07 + 0,022] = **[0,0476 ; 0,0924]** soit [4,8% ; 9,2%]

IC à 99% (z = 2,576) :

ME = 2,576 × 0,01141 = 0,02939

IC = [0,07 – 0,029 ; 0,07 + 0,029] = **[0,0406 ; 0,0994]** soit [4,1% ; 9,9%]

■ Conclusion : La proportion de pièces défectueuses est estimée entre 4,8% et 9,2% (avec 95% de confiance).

Exercice 4 — Quelle taille d'échantillon ?

Énoncé : Un chercheur veut estimer le revenu moyen μ d'une ville avec une marge d'erreur de 500 $ au seuil de 95%. Il sait (historiquement) que σ = 3 000 $. Quelle taille d'échantillon est nécessaire ?

✏■ Solution complète

On cherche n tel que ME ≤ 500 $.

Formule : ME = z_{α/2} × σ/√n

On veut : z_{α/2} × σ/√n ≤ 500

→ √n ≥ z_{α/2} × σ / 500

→ n ≥ (z_{α/2} × σ / ME)²

n ≥ (1,96 × 3 000 / 500)²

n ≥ (5 880 / 500)²

n ≥ (11,76)²

n ≥ **138,3** → **arrondir à n = 139**

■ Le chercheur doit interroger au moins 139 personnes pour avoir une marge d'erreur ≤ 500 $ avec 95% de confiance.

CONCLUSION — Ce qu'il faut retenir

L'estimation par intervalle est l'outil fondamental de la statistique inférentielle. Plutôt que de donner une seule valeur ponctuelle (qui sera presque certainement fausse), on donne une plage de valeurs plausibles avec un niveau de confiance associé.

- Si σ est **connu** → utiliser la loi Z et la formule x■ ± z × σ/√n
- Si σ est **inconnu** → utiliser la loi t de Student et x■ ± t × s/√n
- Pour une **proportion** → toujours la loi Z et p■ ± z × √(p■(1-p■)/n)
- Plus n est grand → plus l'intervalle est précis (étroit)
- Plus le seuil de confiance est élevé → plus l'intervalle est large

Bonne révision et bon examen ! ■